15 முக்கோணியின் கோணங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

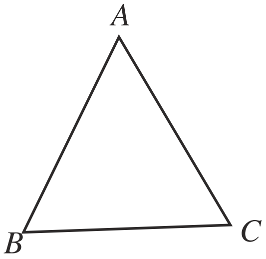
- ✸ முக்கோணி ஒன்றின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டும்போது உண்டாகும் புறக்கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் இரண்டினதும் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன் என்னும் கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தை நிறுவுதல் மற்றும் தேற்றத்தை உபயோகித்துப் பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்
- ✸ ஒரு முக்கோணியின் மூன்று அகக் கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும் என்னும் கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தை நிறுவுதல், ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்கள், புறக்கோணங்கள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

என்னும் தேர்ச்சிகளை அடைவீர்கள்.

15.1 ஒரு முக்கோணியின் அகக்கோணங்களும் புறக்கோணங்களும்

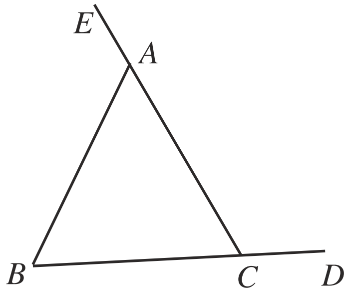
முக்கோணி ABC யிலுள்ள மூன்று கோணங்களையும் பெயரிடக் கற்றுள்ளீர்கள்.

அவை, $A\hat{B}C, B\hat{A}C, B\hat{C}A$ ஆகும்.



இவை முக்கோணியின் அகக் கோணங்கள் எனப்படும். இனி முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC ஆனது D வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. உச்சி C இல் வரையப்பட்ட புறக் கோணம் $A\hat{C}D$ ஆகும்.

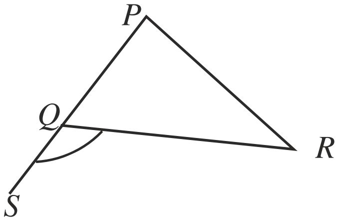
பக்கம் CA ஆனது E வரை நீட்டப்படும்போது உச்சி A யில் உள்ள புறக்கோணம் $B\hat{A}E$ ஆகும்.



புறக் கோணம் $A\hat{C}D$ இற்கான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ என்பனவாகும்.

இவ்வாறே, புறக் கோணம் $B\hat{A}E$ இற்கான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ என்பனவாகும்.

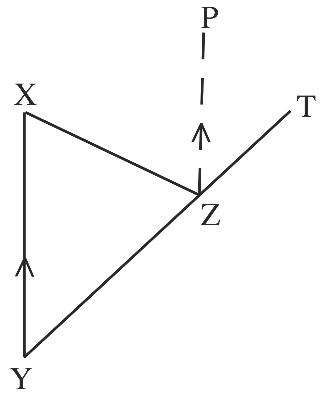
உருவில் முக்கோணி PQR இல் பக்கம் PQ ஆனது S வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது.



புறக்கோணம் $S\hat{Q}R$ இற்கான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் $Q\hat{P}R$, $P\hat{R}Q$ என்பனவாகும்.

தேற்றம்
ஒரு முக்கோணியின் பக்கமொன்றை நீட்டும்போது உண்டாகும் புறக் கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் இரண்டினதும் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன்.

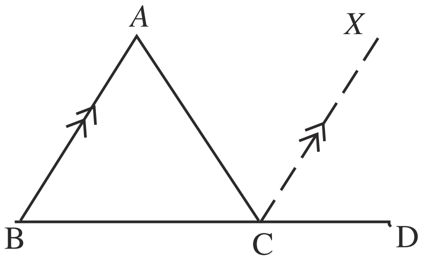
செயற்பாடு



முக்கோணி XYZ இல் பக்கம் YZ ஆனது T வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. YX இற்குச் சமாந்தரமாக ZP யை வரைக.
XY, PZ ஆகிய சமாந்தரக் கோடுகள் XZ என்னும் குறுக்கோடியினால் வெட்டப்படும் முறையைக் கருதி $X\hat{Z}P$ இற்குச் சமனான ஓர் ஒன்றுவிட்ட கோணத்தைப் பெயரிடுக.

$P\hat{Z}T$ யிற்குச் சமனான ஓர் ஒத்த கோணத்தைப் பெயரிடுக.

அதிலிருந்து $X\hat{Z}P + P\hat{Z}T$ அதாவது $X\hat{Z}T$ இற்குச் சமனான ஒரு சோடி கோணத்தைப் பெயரிடுக. இதற்கேற்ப மேற்குறித்த தேற்றம் உண்மையானதா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க. இனி, மேலேயுள்ள தேற்றத்தை முறைமையாக நிறுவுவோம்.



தரவு :- ΔABC யில் பக்கம் BC ஆனது D வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது.

நிறுவவேண்டியது :- $A\hat{C}D = B\hat{A}C + A\hat{B}C$

அமைப்பு :- BA இற்குச் சமாந்தரமாக C இற்கூடாக CX வரையப்பட்டுள்ளது.

நிறுவல் :- $A\hat{C}X = B\hat{A}C$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் $BA // CX$)—(1)

$X\hat{C}D = A\hat{B}C$ (ஒத்த கோணங்கள் $BA // CX$)——(2)

(1) + (2) $A\hat{C}X + X\hat{C}D = B\hat{A}C + A\hat{B}C$

இலவச விநியோகத்திற்காக

$A\hat{C}X$, $X\hat{C}D$ என்பன அடுத்துள்ள கோணச் சோடியாகும்.

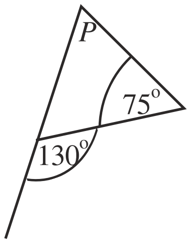
$A\hat{C}X + X\hat{C}D = A\hat{C}D$ ஆகும்.

$\therefore A\hat{C}D = B\hat{A}C + A\hat{B}C$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப ΔABC இல் பக்கம் BC யை D வரை நீட்டுவதால் உண்டாகிய புறக் கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணங்களாகிய $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ என்பவற்றின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகும்.

உதாரணம் 15.1

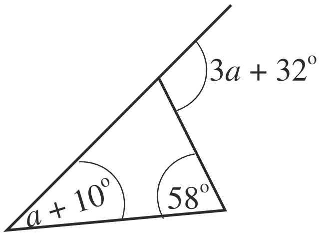
தரப்பட்டுள்ள உருவில் P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



$$P + 75^\circ = 130^\circ$$
$$P = 130^\circ - 75^\circ$$
$$P = 55^\circ$$

உதாரணம் 15.2

தரப்பட்டுள்ள உருவில் a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. புறக் கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

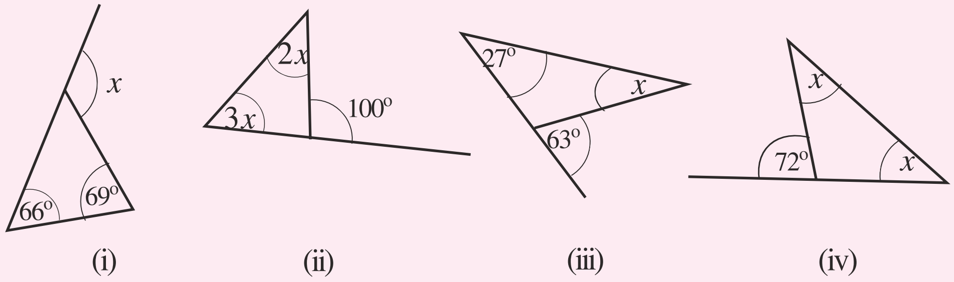


$$a + 10^\circ + 58^\circ = 3a + 32^\circ$$
$$a + 68^\circ = 3a + 32^\circ$$
$$68^\circ - 32^\circ = 3a - a$$
$$\therefore 2a = 36^\circ$$
$$a = \frac{36}{2} = 18^\circ$$
$$a = 18^\circ$$

புறக்கோணம் $= 3a + 32^\circ$
$= 3 \times 18^\circ + 32^\circ$
$= 54^\circ + 32^\circ$
$= 86^\circ$

பயிற்சி 15.1

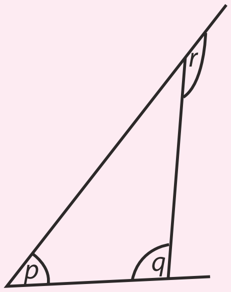
1. தரப்பட்டுள்ள உருவங்களில் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



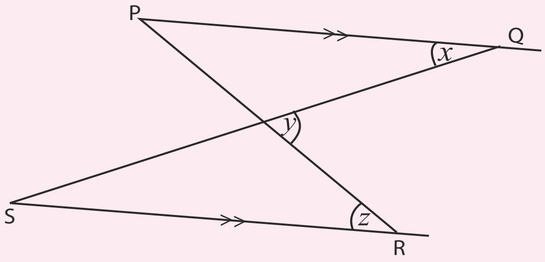
2. ΔPQR இல் பக்கம் QR ஆனது S வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. SQ இற்கு சமாந்தரமாக P இற்கூடாக PT வரையப்பட்டுள்ளது.

   $T\hat{P}R = Q\hat{P}R + P\hat{Q}R$ என நிறுவுக.

3 . தரப்பட்டுள்ள உருவில் $q = 2p$ ஆகும். $p = \frac{1}{3}r$ எனக் காட்டுக.



4. உருவில் $PQ//SR$ ஆயின் $y = x + z$ என நிறுவுக.



5. ΔABC இல் பக்கம் BC ஆனது K வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ ஆகிய அகக் கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள் O வில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன. நீட்டப்பட்ட AO ஆனது BC யை P யில் சந்திக்கின்றது. $A\hat{C}K = 2B\hat{O}P$ என நிறுவுக.

இலவச விநியோகத்திற்காக

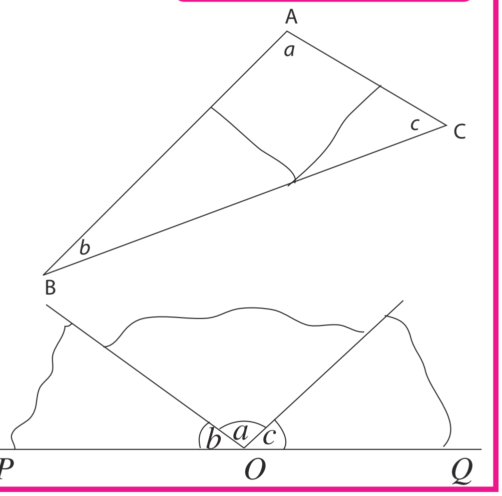
15.2 முக்கோணியின் கோணங்கள்

தேற்றம்

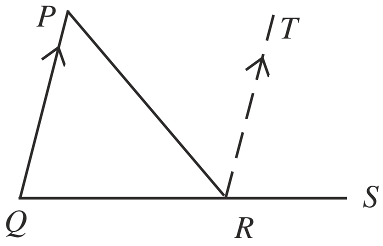
முக்கோணியின் மூன்று அகக் கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை இரண்டு செங்கோணங்கள் ஆகும்.

செயற்பாடு

ABC என்னும் ஏதேனுமொரு முக்கோணியை வரைக. *A*, *B*, *C* ஆகிய உச்சிகளிலுள்ள கோணங்களை உருவிலுள்ளவாறு வேறாக்குக.
உச்சிகள் ஒரே புள்ளியில் அமையுமாறும் பக்கங்கள் பொருந்துமாறும் ஒரு தாளில் ஒட்டுக.
உருவிலுள்ளவாறு இவை *PQ* என்னும் கோடாகப் பெறப்படுகிறதா எனப் பரீட்சிக்க. இதற்கேற்ப நீர் தீர்மானிக்கக்கூடியது யாது?



இனி, இத்தேற்றத்தை நிறுவுவோம்.



தரவு :- *PQR* என்பது யாதாயினுமொரு முக்கோணியாகும்.

நிறுவவேண்டியது :- $P\hat{Q}R + Q\hat{R}P + R\hat{P}Q = 180^{o}$

அமைப்பு :- பக்கம் *QR* ஆனது *S* வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. *QP* இற்குச் சமாந்தரமாக *R* இனூடாக *RT* வரையப்பட்டுள்ளது.

நிறுவல் :- $R\hat{P}Q = P\hat{R}T$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் $QP \,//\, RT$)——(1)

$P\hat{Q}R = T\hat{R}S$ (ஒத்த கோணங்கள் $QP \,//\, RT$)——(2)

(1) + (2) $\therefore\ R\hat{P}Q + P\hat{Q}R = P\hat{R}T + T\hat{R}S$

சமன்பாட்டின் இருபக்கமும் $Q\hat{R}P$ ஐக் கூட்டுவதால்

$$P\hat{Q}R + Q\hat{R}P + R\hat{P}Q = Q\hat{R}P + P\hat{R}T + T\hat{R}S$$

ஆனால் $Q\hat{R}P + P\hat{R}T + T\hat{R}S = 180^O$ (QRS நேர்கோட்டின் மீதுள்ள மிகைநிரப்பும் அடுத்துள்ள கோணங்கள்.)

$$\therefore P\hat{Q}R + Q\hat{R}P + R\hat{P}Q = 180^O$$ ஆகும்.

மேலேயுள்ள நிறுவலின்படி ஒரு முக்கோணியின் மூன்று அகக் கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை இரண்டு செங்கோணங்கள் ஆகும்.

உதாரணம் 15.3

ஒரு முக்கோணியில் கோணங்களின் பருமன்களின் விகிதம் 2 : 5 : 11 ஆகும். பெரிய கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் கணித்து முக்கோணி எவ்வகையைச் சார்ந்தது எனக் கூறுக.

சிறிய கோணம் $2a$ ஆயின், மற்றைய கோணம் $5a$ உம் பெரிய கோணம் $11a$ உம் ஆகும். கோணங்களைக் கூட்டுவதால்

$$2a + 5a + 11a = 180^o$$
$$18a = 180^o$$
$$a = \frac{180^o}{18}$$
$$a = 10^o$$

பெரிய கோணம் $= 11a$ என்பதால்

பெரிய கோணம் $= 11 \times 10^o$

$= 110^o$

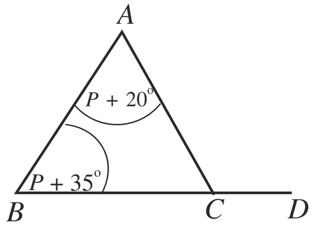
முக்கோணியின் பெரிய கோணம் 110° என்பதால் முக்கோணி விரிகோண முக்கோணியாகும்.

உதாரணம் 15.4

(i). ΔABC இல் புறக் கோணம் ACD இன் பெறுமானத்தை P இல் தருக.

$A\hat{C}D = A\hat{B}C + B\hat{A}C$ ஆகும் (புறக் கோணம், அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன் என்பதால்)

$$A\hat{C}D = P + 35^o + P + 20^o$$
$$= 2P + 55^o$$



(ii).கோணம் ACB இன் பெறுமானத்தை P இல் தருக.

$$\hat{ACB} + \hat{ACD} = 180^\circ \text{ (மிகை நிரப்பி அடுத்துள்ள கோணங்கள்)}$$

$$\therefore \quad A\hat{C}B = 180^\circ - A\hat{C}D$$

$$A\hat{C}B = 180^\circ - (2P + 55^\circ)$$
$$= 180^\circ - 2P - 55^\circ$$
$$= 125^\circ - 2P$$

(iii) $A\hat{C}B = 65^\circ$ ஆயின் P இன் பெறுமானம் எத்தனை பாகைகள் எனக் காண்க.

$$A\hat{C}B = 65^\circ$$
$$65^\circ = 125^\circ - 2P$$
$$2P = 125^\circ - 65^\circ$$
$$2P = 60^\circ$$
$$P = \frac{60^\circ}{2}$$
$$P = 30^\circ$$

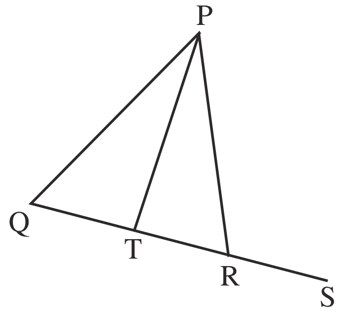
(iv) $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$B\hat{A}C = P + 20^\circ$$
$$= 30^\circ + 20^\circ$$
$$B\hat{A}C = 50^\circ$$

$$A\hat{B}C = P + 35^\circ$$
$$= 30^\circ + 35^\circ$$
$$A\hat{B}C = 65^\circ$$

உதாரணம் 15.5

ΔPQR இல் பக்கம் QR ஆனது S வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. கோணம் QPR இன் இருகூறாக்கியானது QR ஐ T யில் வெட்டுகிறது. $P\hat{Q}S + P\hat{R}S = 2P\hat{T}S$ என நிறுவுக.



தரவு :- ΔPQR இல் QR ஆனது S வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. கோணம் QPR இன் இரு கூறாக்கியானது QR ஐ T யில் வெட்டுகிறது.

நிறுவ வேண்டியது:- $P\hat{Q}S + P\hat{R}S = 2P\hat{T}S$

நிறுவல் :- $P\hat{T}S = P\hat{Q}S + Q\hat{P}T$, ($\Delta PQT$ இல் புறக் கோணம் $P\hat{T}S$ ஆனது கோணம் $P\hat{Q}S, Q\hat{P}T$ ஆகிய அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன்)

$P\hat{Q}S = P\hat{T}S - Q\hat{P}T$

$P\hat{Q}S = P\hat{T}S - \frac{1}{2}Q\hat{P}R$ ——(1) ($Q\hat{P}T = \frac{1}{2}Q\hat{P}R$ ஆகும்.)

$P\hat{R}S = P\hat{T}S + T\hat{P}R$ (ΔPTR இல் புறக் கோணம் $P\hat{R}S$ ஆனது $P\hat{T}R$, $T\hat{P}R$ ஆகிய அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன்)

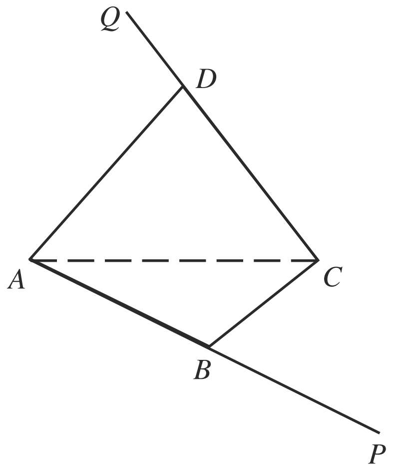
$\therefore P\hat{R}S = P\hat{T}S + \frac{1}{2}Q\hat{P}R$ ——(2) ($T\hat{P}R = \frac{1}{2}Q\hat{P}R$ ஆகும்)

மேலே (1) + (2) மூலம்

$P\hat{Q}S + P\hat{R}S = 2P\hat{T}S$ ஆகும்.

உதாரணம் 15.6

எந்தவொரு நாற்பக்கலினதும் எதிர்க் கோணச் சோடி ஒன்றின் கூட்டுத்தொகை மற்றைய இரு உச்சிகளிலும் உள்ள புறக் கோணச் சோடியின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம். மேற்குறித்த கூற்று உண்மையென நிறுவுக.



தரவு :- நாற்பக்கல் ABCD யில் பக்கம் AB ஆனது P வரைக்கும் பக்கம் CD ஆனது Q வரைக்கும் நீட்டப்பட்டுள்ளன.

நிறுவவேண்டியது :- $B\hat{A}D + B\hat{C}D = C\hat{B}P + A\hat{D}Q$

அமைப்பு :- மூலைவிட்டம் AC யை வரைக.

நிறுவல் :- $\triangle ABC$ யில் $B\hat{A}C + A\hat{C}B = C\hat{B}P$ (இரு அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை புறக் கோணத்திற்குச் சமம்) ------ (1)

ΔACD யில் $C\hat{A}D + A\hat{C}D = A\hat{D}Q$

(மேற்குறித்த தேற்றம்) ------- (2)

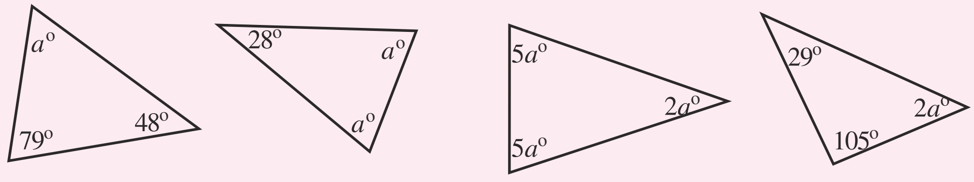
$$(1) + (2),\ B\hat{A}C + C\hat{A}D + A\hat{C}B + A\hat{C}D = C\hat{B}P + A\hat{D}Q$$

$$\underbrace{B\hat{A}C + C\hat{A}D}_{B\hat{A}D} + \underbrace{A\hat{C}B + A\hat{C}D}_{B\hat{C}D} = C\hat{B}P + A\hat{D}Q$$

இவ்வலகில் நீங்கள் கற்ற இரண்டு தேற்றங்களையும் உபயோகித்துக் கீழே தரப்பட்டுள்ள நிறுவல்களைச் செய்க.

பயிற்சி 15.2

1. தரப்பட்டுள்ள உருவங்களில் a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



(i) (ii) (iii) (iv)

2. ஒரு முக்கோணியின் மூன்று அகக் கோணங்களினதும் பருமன்களின் விகிதம் 3 : 5 : 7 ஆகும். சிறிய கோணம், பெரிய கோணம் ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. இது ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணி ஆகுமா?

3. ஒரு செங்கோண முக்கோணியில் கூர்ங்கோணங்கள் இரண்டினதும் விகிதம் 3 : 7 ஆகும். சிறிய கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

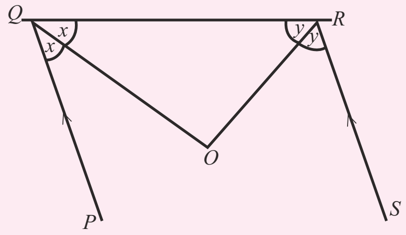
4. ஒரு முக்கோணியின் ஒரு கோணத்தின் பெறுமானம் 72° ஆகும். மற்றைய இரண்டு கோணங்களினதும் விகிதம் 8 : 1 ஆகும். பெரிய கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் கணித்து முக்கோணி ஒரு விரிகோண முக்கோணி எனக் காட்டுக.

5. ஒரு முக்கோணியின் சிறிய கோணம், பெரிய கோணம் என்பவற்றுக்கிடையிலான விகிதம் 1 : 2 ஆவதுடன் பெரிய கோணம், மத்திம கோணம் என்பவற்றுக்கிடையிலான விகிதம் 4 : 3 ஆகும். முக்கோணியின் கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

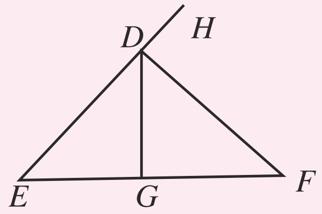
6. Δ PQR இல் $\hat{P} + \hat{R} = 128^o$ உம் $\hat{Q} + \hat{R} = 105^o$ உம் ஆயின், மூன்று கோணங்களினதும் பெறுமானங்களை வெவ்வேறாகக் காண்க. PQR ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணியாகும் எனக் காட்டுக.

7. நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் மூலைவிட்டம் AC இனால் $D\hat{A}B, B\hat{C}D$ ஆகிய உச்சிக் கோணங்கள் இருகூறிடப்படுகின்றன. $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ என நிறுவுக.

8. உருவில் $PQ//SR$ ஆகும். $P\hat{Q}R$, $Q\hat{R}S$ ஆகிய கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள் O வில் இடைவெட்டுகின்றன. $Q\hat{O}R = 90^o$ என நிறுவுக.



9. உருவில் $D\hat{E}F = G\hat{D}F$ ஆகுமெனின், $E\hat{D}F = D\hat{G}F$ என நிறுவுக. மேலேயுள்ள விடையை உபயோகித்து அல்லது வேறு முறையில் $F\hat{D}H = D\hat{G}E$ எனக் காட்டுக.



10. Δ XYZ இல் $X\hat{Y}Z = 90^o$ ஆகும். X , Z ஆகிய அகக் கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள் P இல் இடைவெட்டுகின்றன. $X\hat{P}Z = 135^o$ என நிறுவுக.

11. ஒரு மூலைவிட்டத்தை வரைவதன் மூலம் எந்தவொரு நாற்பக்கலினதும் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° என நிறுவுக.

இலவச விநியோகத்திற்காக